

Wytrzymałość konstrukcji 1

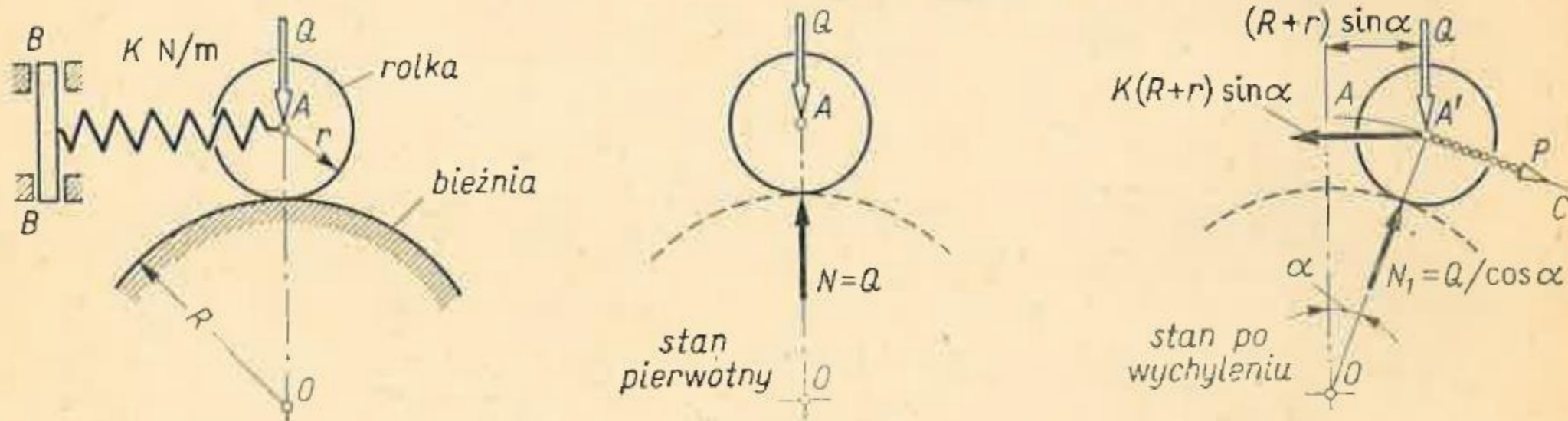
Wykład 14B

Zagadnienia stateczności ustrojów

Podstawowe pojęcia. Metody rozwiązania

Zjawisko utraty stateczności występuje w urządzeniach, w których jeden wymiar, np. grubość, lub dwa wymiary przekroju, są małe w porównaniu z pozostałymi.

Metodę badania utraty stateczności przedstawimy na przykładzie:



Rys. 15.1. Przykład analizy stateczności ustroju

Wychyleniu rolki o kąt α towarzyszy tu zmiana wartości i kierunku reakcji z N na N_1 oraz pojawienie się siły $K(R+r) \sin \alpha$ w sprężynie. Badając na razie tylko małe wychylenie α widzimy, że na rolkę działa w kierunku $A'C$ siła

$$P = Q \sin \alpha - K(R+r) \sin \alpha \cos \alpha \approx [Q - K(R+r)] \alpha,$$

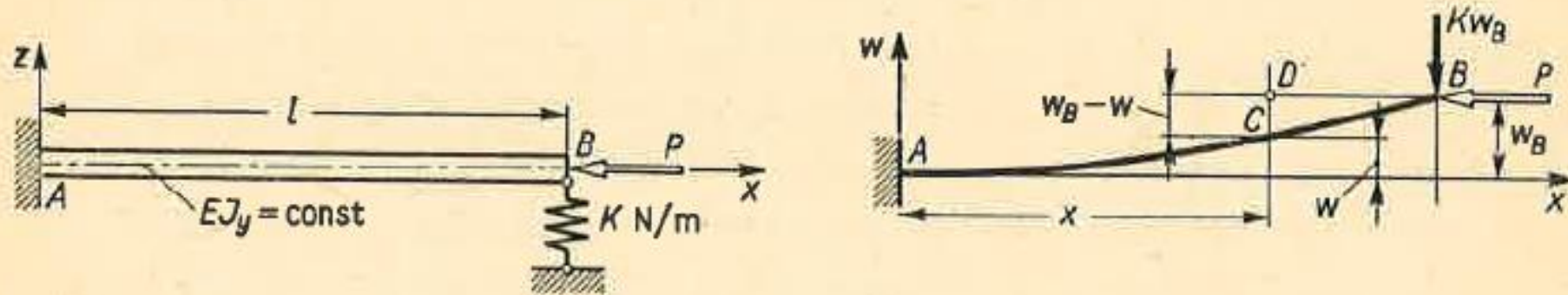
gdy $Q = K(R+r)$, urządzenie jest w stanie równowagi obojętnej.

Metoda analizy równowagi

- a) określenie stanu równowagi pierwotnej (postać odkształceń, charakter i wartość wszystkich sił wewnętrznych i zewnętrznych),
- b) określenie wychylenia ustroju z pierwotnej równowagi i towarzyszących temu zmian wartości, kierunków i charakteru wszystkich sił,
- c) sformułowanie i rozwiązanie warunku równowagi ustroju w stanie wychylonym oraz dyskusja wyników.

ZADANIE 1. Wyznaczyć krytyczną wartość siły P pryzmatycznego pręta wspornikowego z dodatkową sprężystą podporą (rys. 15.3):

Rozwiązanie. Ponieważ etap a) jest identyczny, jak w przykładzie z rys. 15.2, przechodzimy od razu do etapu b), w którym zakładamy wychylenie $w(x)$, jak podaje rysunek. Temu wychyleniu towa-



Rys. 15.3. Wyboczenie wspornika z dodatkową podporą sprężystą

rzyszy pojawienie się reakcji sprężyny Kw_B , wobec czego w badanym przekroju C moment gnący od obciążenia jest

$$P \cdot \overline{CD} - Kw_B(l-x) = P(w_B - w) - Kw_B(l-x).$$

Równowaga każdego elementu wyboczonego pręta zajdzie, gdy

$$EJ_y w'' = P(w_B - w) - Kw_B(l-x),$$

skąd po uporządkowaniu otrzymujemy równanie różniczkowe

$$EJ_y w'' + Pw = [P - K(l-x)] w_B,$$

$$EJ_y w'' + Pw = [P - K(l-x)] w_B,$$

w którym w_B jest wartością stałą. Rozwiązanie równania

$$w(x) = B_1 \sin kx + B_2 \cos kx + [1 - (K/P)(l-x)] w_B$$

zawiera stałe całkowania B_1 i B_2 , przy czym $k = \sqrt{P/EJ_y}$. Do wyznaczenia tych stałych oraz ugięcia w_B mamy teraz warunki

$$(w)_{x=0} = 0, \quad (w')_{x=0} = 0, \quad (w)_{x=l} = w_B,$$

dające w wyniku następujący układ równań jednorodnych

$$\begin{aligned} 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + [1 - (Kl/P)] w_B &= 0, \\ k B_1 + 0 \cdot B_2 + (K/P) w_B &= 0, \\ \sin kl B_1 + \cos kl B_2 + 0 \cdot w_B &= 0. \end{aligned}$$

Trywialne rozwiązanie tego układu, tj. $B_1 = B_2 = w_B = 0$, oznacza równowagę pręta w postaci prostej. Niezerowe rozwiązanie, czyli równowagę w postaci wygiętej, otrzymamy przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny D tego układu równań, tj.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 - (Kl/P) \\ k & 0 & K/P \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

W wyniku tego mamy zależność⁽¹⁾.

$$(K/P) \sin kl + k [1 - (Kl/P)] \cos kl = 0,$$

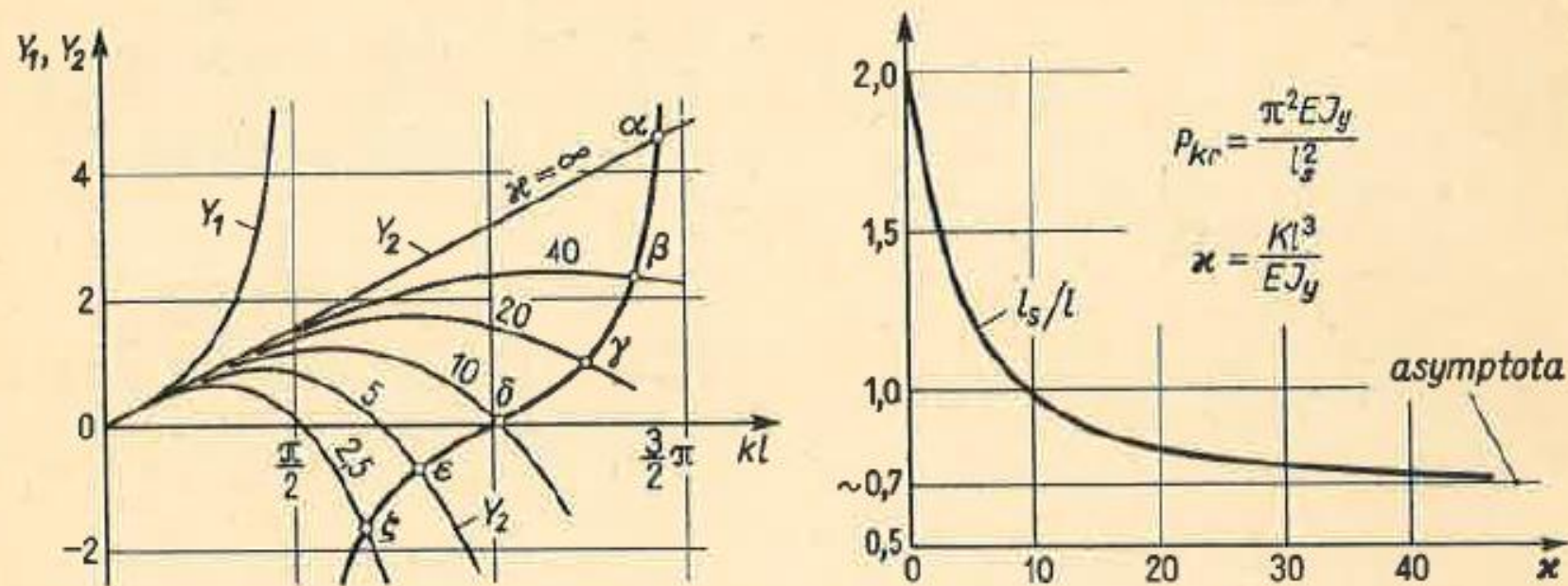
która po przekształceniach ma postać

$$\operatorname{tg} kl = kl - (EJ_y/Kl^3) (kl)^3.$$

$$\operatorname{tg} kl = kl - (EJ_y/KI^3) (kl)^3 .$$

Wartość $(kl)_{\min}$ spełniająca to równanie przestępne wyznaczamy wykreślnie (rys. 15.4) jako odciętą odpowiadającą punktom α, β, \dots przecięcia krzywej $Y_1 = \operatorname{tg} kl$ z krzywą

$$Y_2 = kl - (1/\varkappa) (kl)^3 ,$$



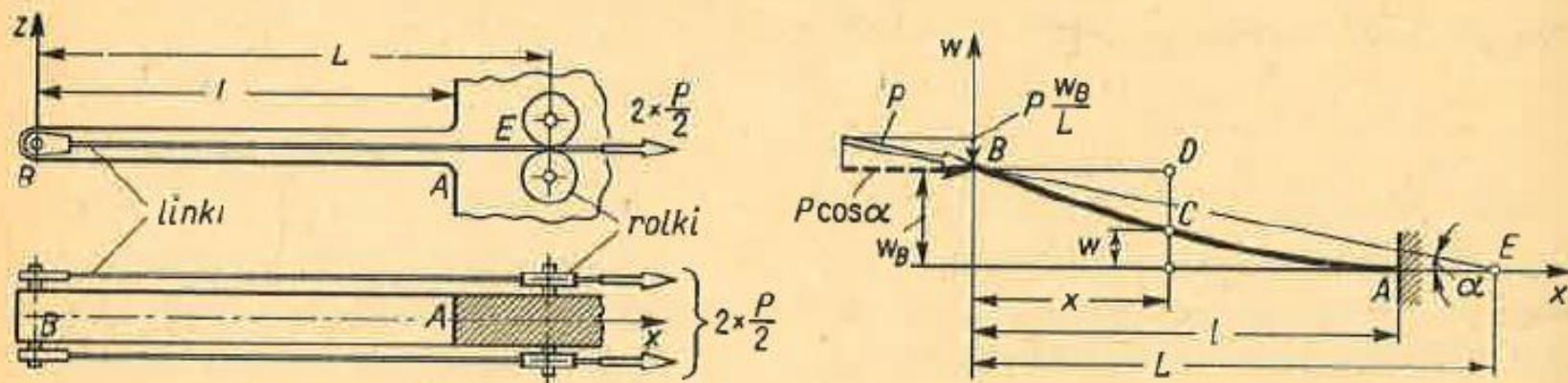
Rys. 15.4. Wynik rozwiązania wyboczenia z rys. 15.3

gdzie parametr $\varkappa = KI^3/EJ_y$ charakteryzuje względną sztywność sprężyny. Przypadek $\varkappa = \infty$ odpowiada sztywnej podporze jak na rys. 15.2 i wtedy $l_s \approx 0,70l$. Przypadek $\varkappa = 0$ oznacza pręt wspornikowy bez podpory i wtedy $l_s = 2l$ (art. 6.4). W sytuacjach pośrednich wartości l_s/l podaje rysunek.

ZADANIE 2

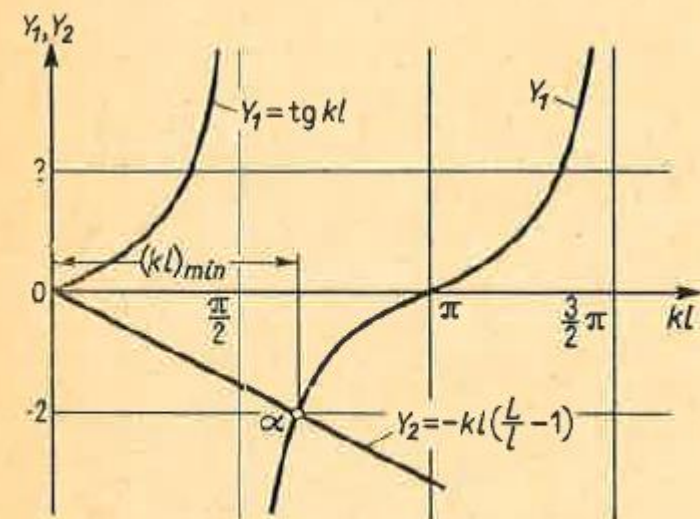
Rozwiązanie. Obraz pręta w stanie wygiętym jest podobny do rys. 15.3, gdyż linki powodują zmianę kierunku siły P , w wyniku czego na koniec B działają: pozioma siła $P \cos \alpha \approx P$ oraz pionowa $P w_B/L$. Ta ostatnia spełnia więc rolę sprężyny o sztywności $K = P/L$. Wstawiając tę wartość do równania określającego wielkość kl mamy teraz zależność

$$\operatorname{tg} kl = -kl \left[\frac{L}{l} - 1 \right],$$



Rys. 15.5. Wyboczenie pręta ze sterowaną zmianą kierunku siły P

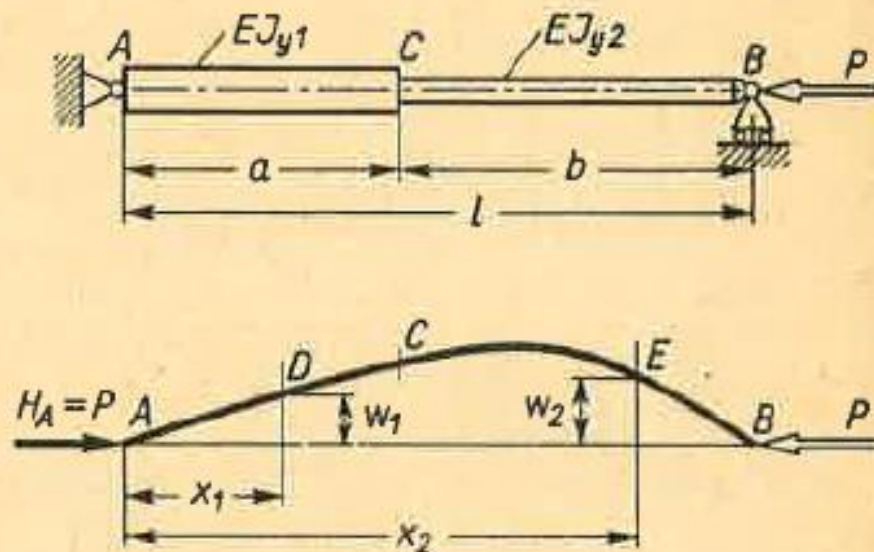
której rozwiązanie metodą wykreślną (rys. 15.6) daje wartość $(kl)_{\min}$. Widać, że gdy $L/l > 1$, czyli gdy rolki prowadzące linki są na prawo od punktu A , wówczas $(\pi/2) < (kl)_{\min} < \pi$. Gdy $L = l$, wówczas $(kl)_{\min} = \pi$, a swobodna długość $l_s = l$ jak dla pręta przegubowo podpartego na końcach (przypadek podstawowy). Gdy $L < l$, prosta Y_2 przecina krzywą Y_1 dla kl w przedziale $\pi, 3\pi/2$ i wtedy $l_s < l$. Powyższa dyskusja wskazuje, jak dużą rolę w analizie wyboczenia odgrywa kwestia zmiany kierunku sił obciążających.



Rys. 15.6. Rozwiązanie równania $\operatorname{tg} kl = -kl \left[\frac{L}{l} - 1 \right]$

ZADANIE 3

$$EJ_{y1} = 4EJ_{y2}, \quad a = b = l/2.$$



a ich rozwiązanie przy oznaczeniach $k_1 = \sqrt{P/EJ_{y1}}$, $k_2 = \sqrt{P/EJ_{y2}}$ jest

$$w_1(x) = B_1 \sin k_1 x + B_2 \cos k_1 x, \quad w_2(x) = C_1 \sin k_2 x + C_2 \cos k_2 x.$$

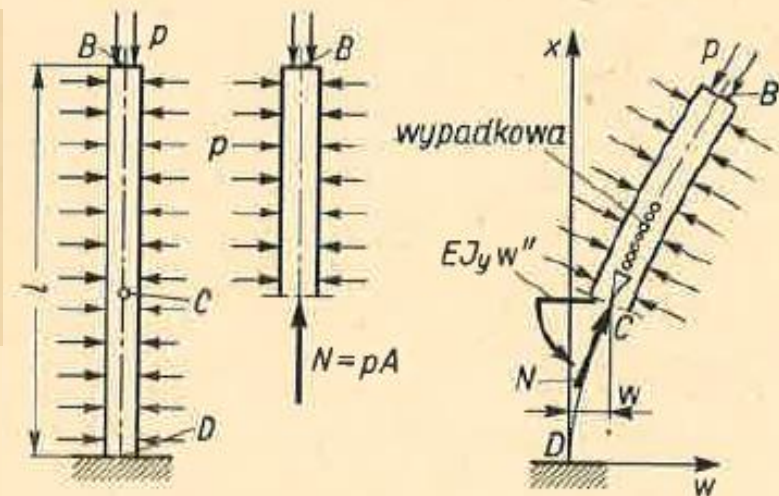
Stałe B_1 , B_2 , C_1 i C_2 wyznaczamy z następujących warunków;

$$(w_1)_{x_1=0} = 0, \quad (w_1)_{x_1=a} = (w_2)_{x_2=a}, \quad (w_1')_{x_1=a} = (w_2')_{x_2=a}, \quad (w_2)_{x=l} = 0,$$

ZADANIE 4

5. Na pryzmatyczny pionowy pręt wywarto za pośrednictwem cieczy ciśnienie p wywołujące w pręcie siłę ściskającą $N = pA$ (rys. 15.9). Czy w tych warunkach pręt może wyboczyć się?

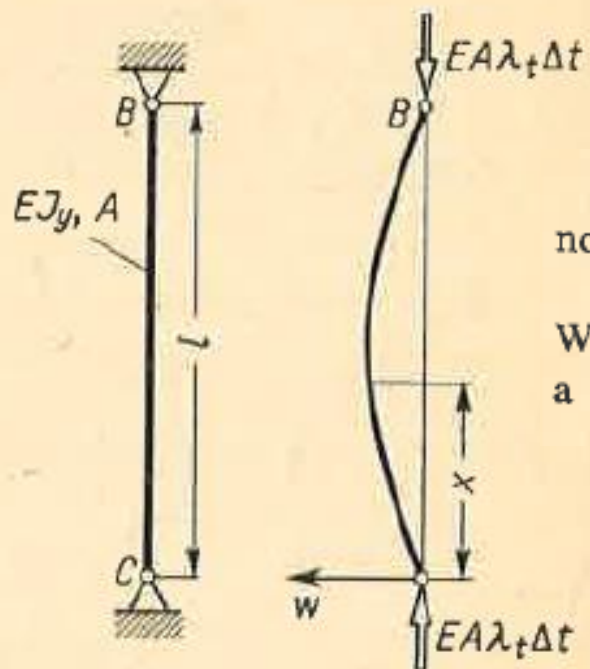
Odp. Nie. Załóżmy na chwilę, że pręt ma postać wygiętą. Ciśnienie p działające na całą powierzchnię (boczną i górną) odciętej myślowo części BC ma wypadkową pA prostopadłą do przekroju C i przechodzącą przez jego środek ciężkości, *nie daje natomiast żadnego momentu zginającego*. Wynikający ze zgięcia pręta moment $EJ_y w''$ jest więc równy zero, skąd wynika $w \equiv 0$, czyli równowaga w postaci prostej. Codziennym przykładem tego są rośliny w wodzie, które mimo swej wiotkości zachowują prostą postać

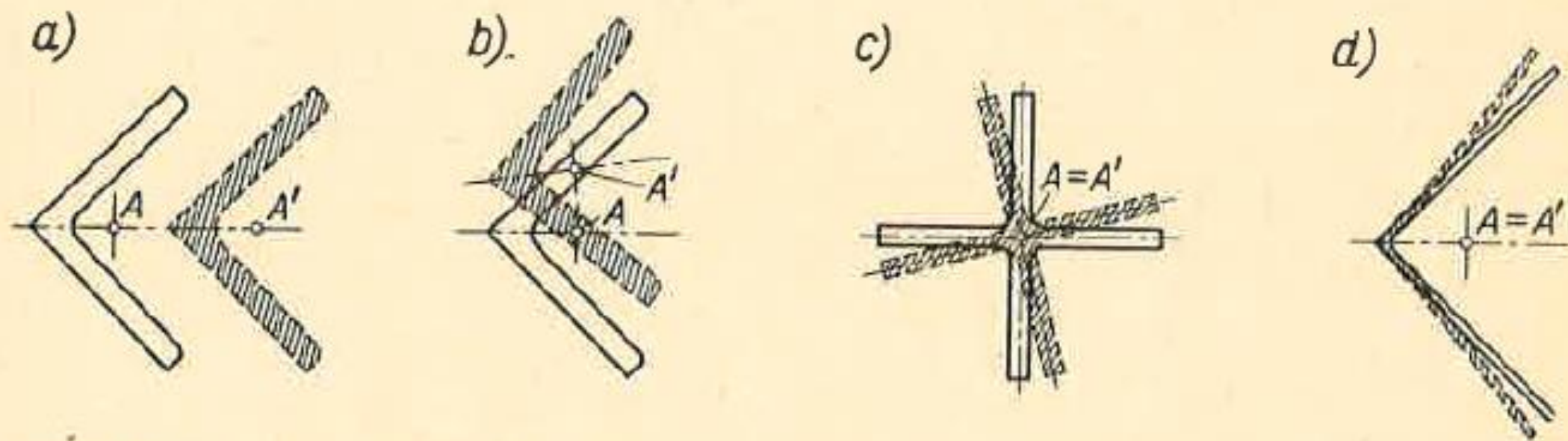


ZADANIE 5

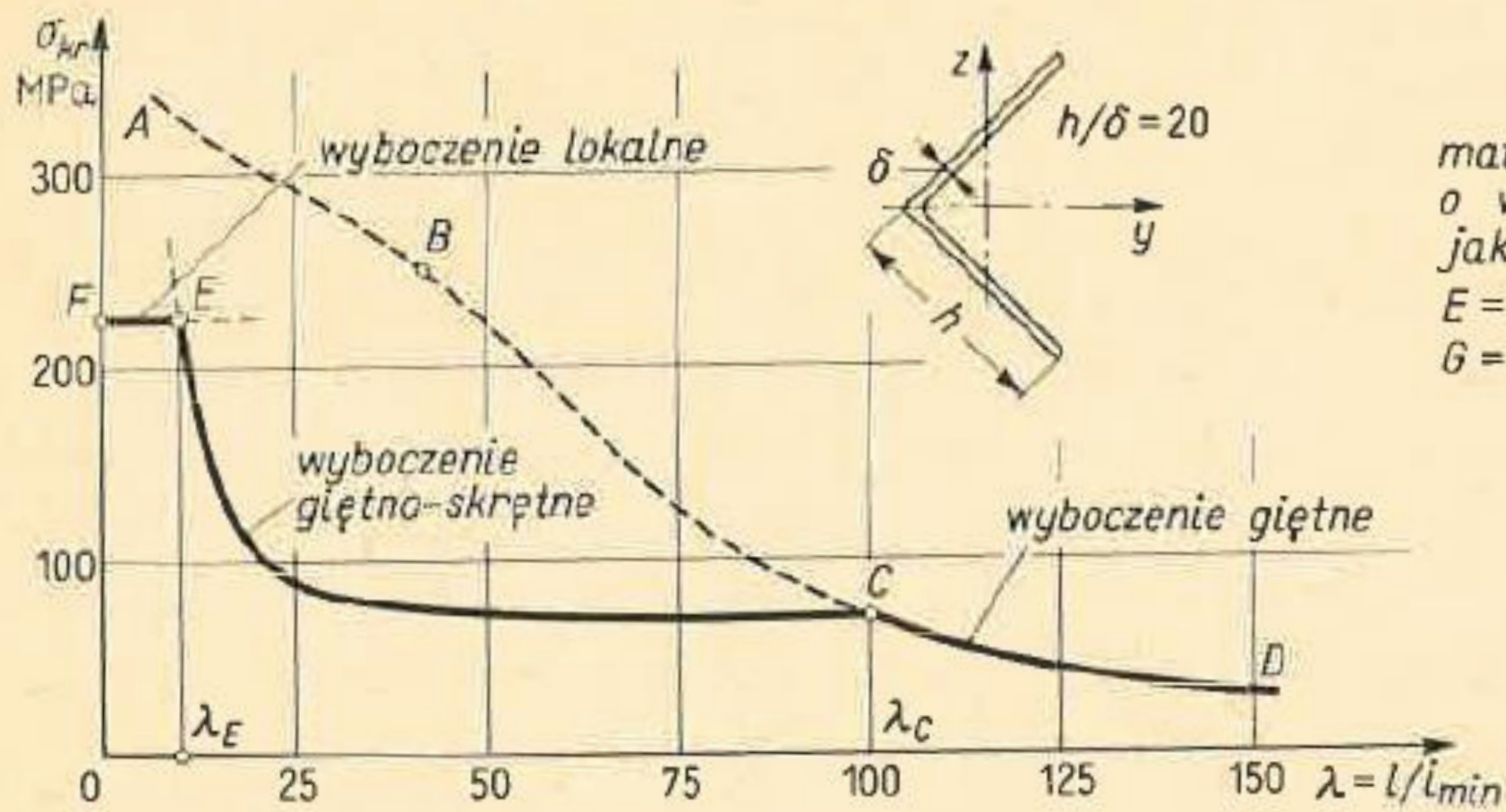
6. Pryzmatyczny nieważki pręt oparty na nieprzesuwnych przegubach (rys. 15.10) ogrzewamy równomiernie o Δt . Wyznaczyć wartość Δt_{kr} , przy której pręt ulegnie wyboczeniu.

Odp. Wobec braku swobody wydłużenia się powstaje w pręcie siła ściskająca $P = EA\lambda_t \Delta t$ (art. 10.8). Wyboczenie nastąpi, gdy $P = P_{kr} = \pi^2 EJ_y / l^2$, skąd $\Delta t_{kr} = \pi^2 / \lambda^2 \lambda_t$, gdzie $\lambda = l/i$, smukłość pręta, a λ_t – współczynnik rozszerzalności liniowej.



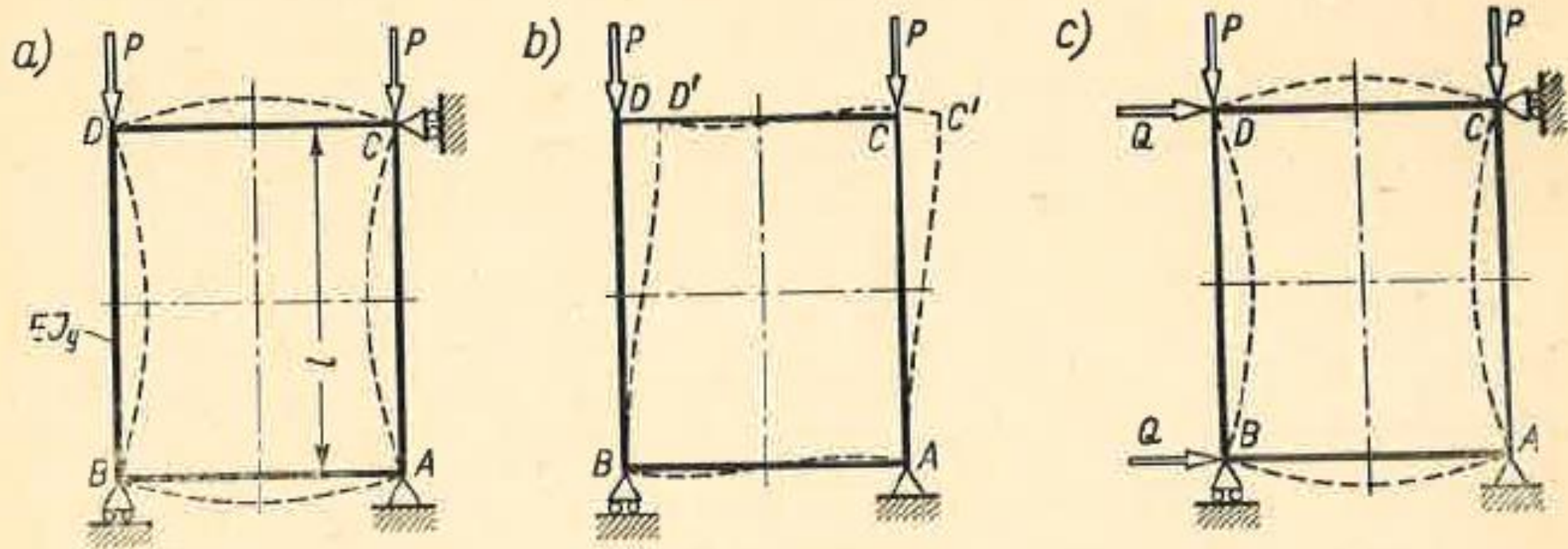


Rys. 15.17. Przemieszczenia przekroju ściskanego pręta przy różnych formach utraty stateczności
Pierwotne położenie przekroju narysowano linią ciągłą.

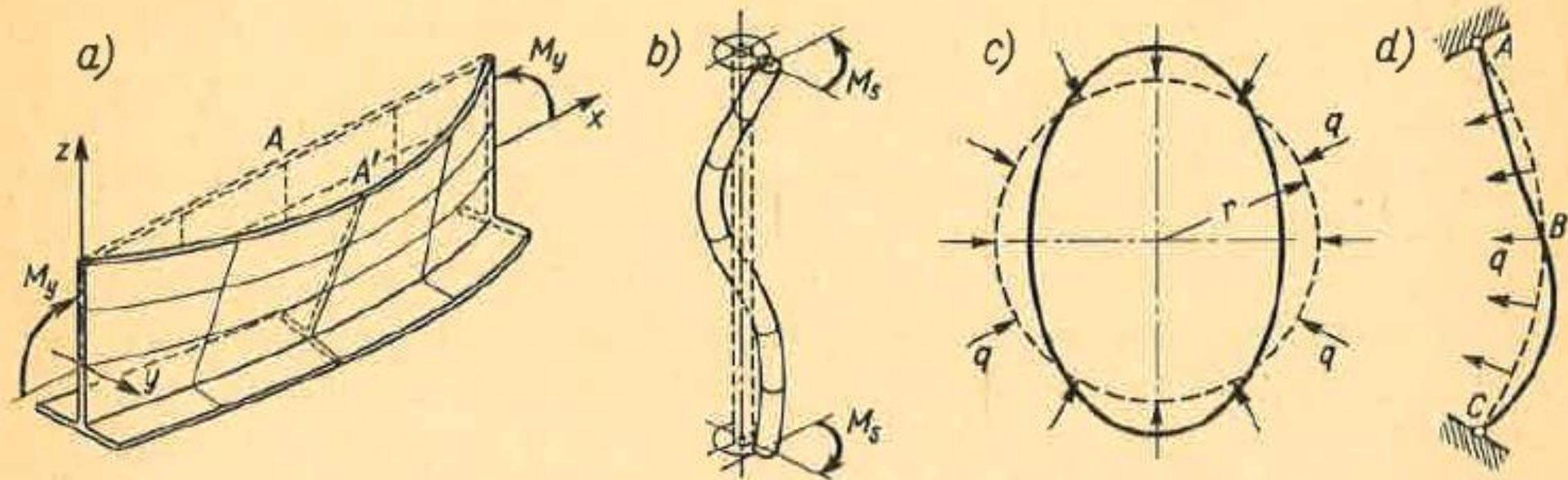


materiał: dural
o własnościach
jak na rys. 15.16
 $E = 7 \cdot 10^4$ MPa
 $G = 2,8 \cdot 10^4$ MPa

Rys. 15.18. Typowy wykres $\sigma_{kr}(\lambda)$ dla cienkościennego profilu otwartego

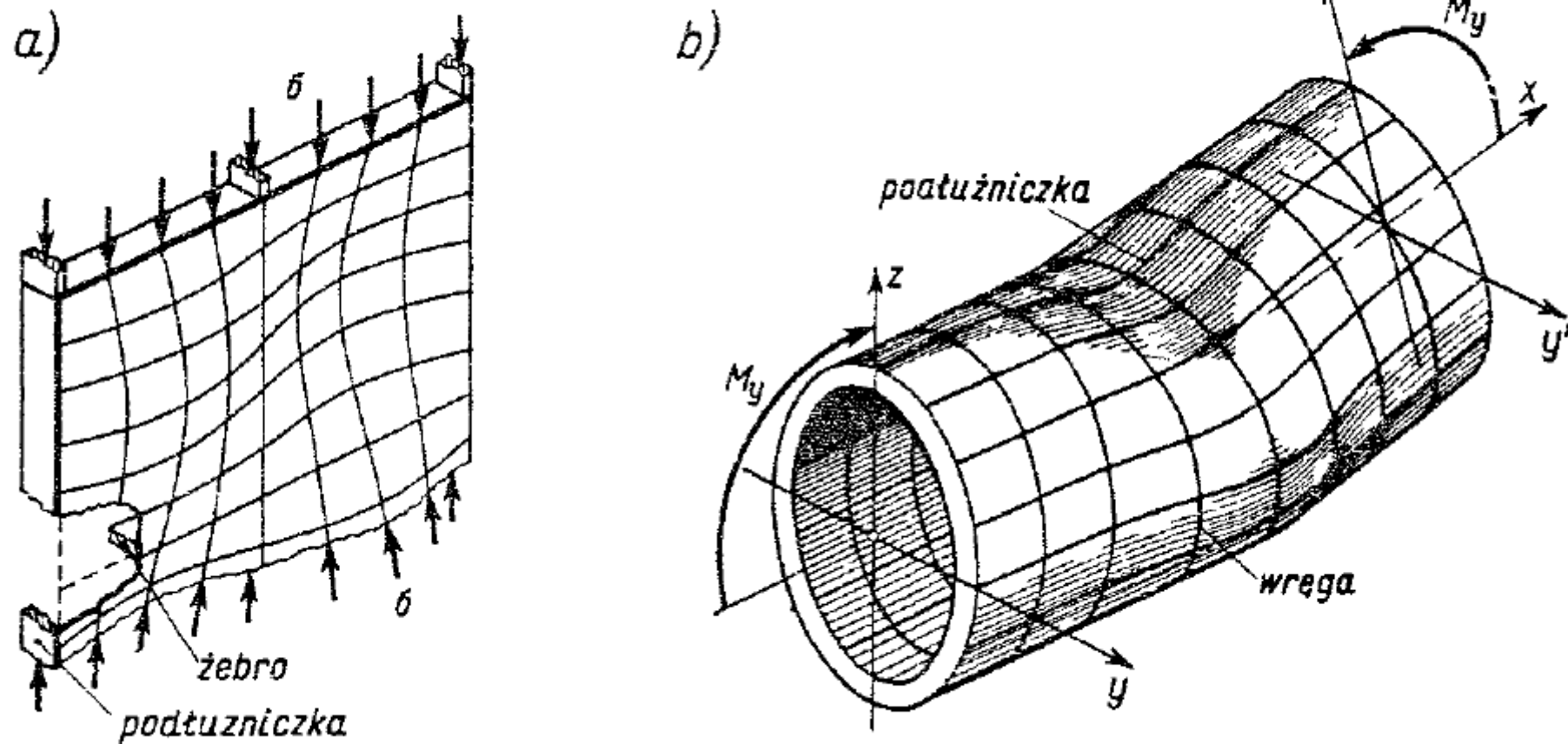


Rys. 15.19. Jakościowa analiza wyboczenia ustroju (ramy)



Rys. 15.21. Przykłady różnych form utraty stateczności

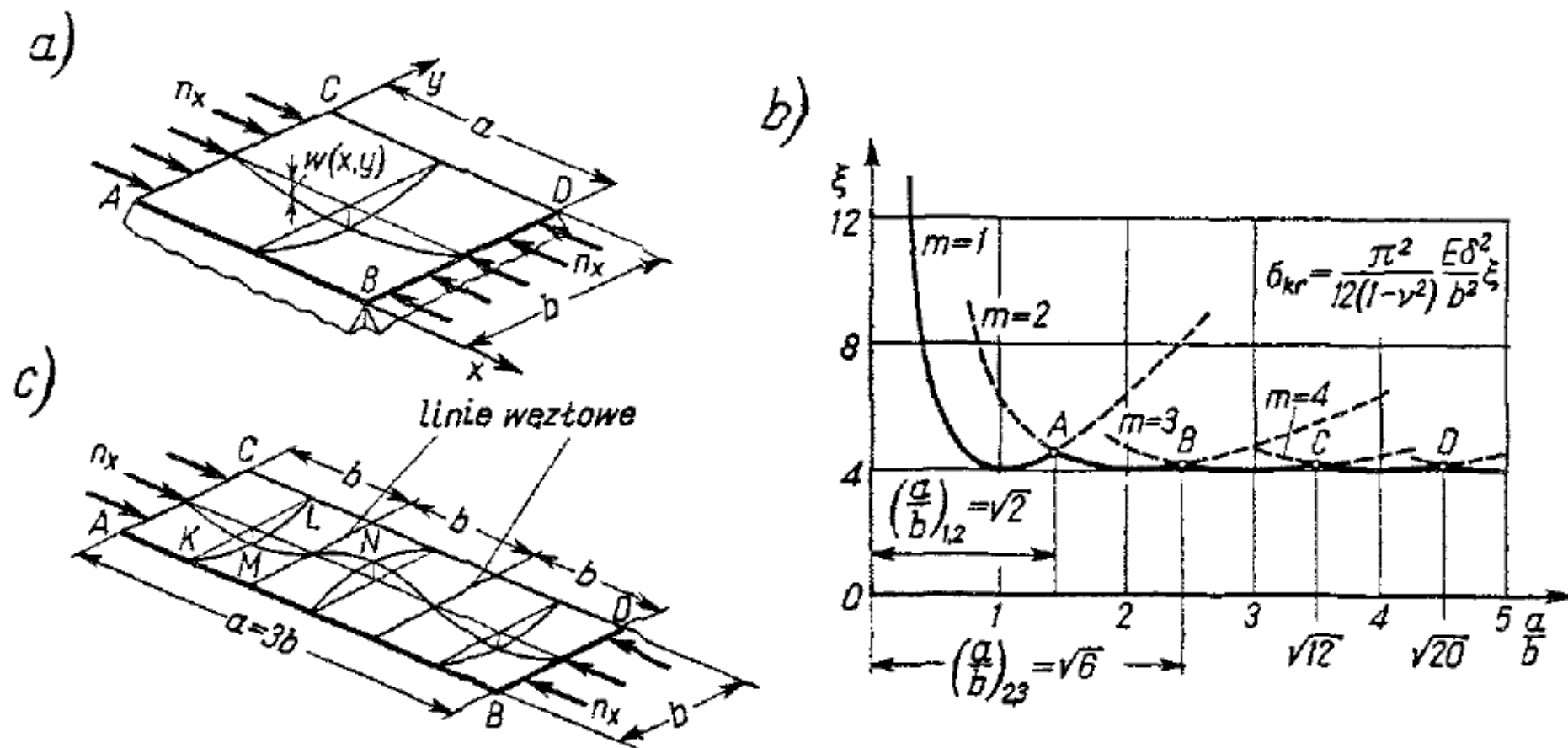
STATECZNOŚĆ PŁYT I POWŁOK



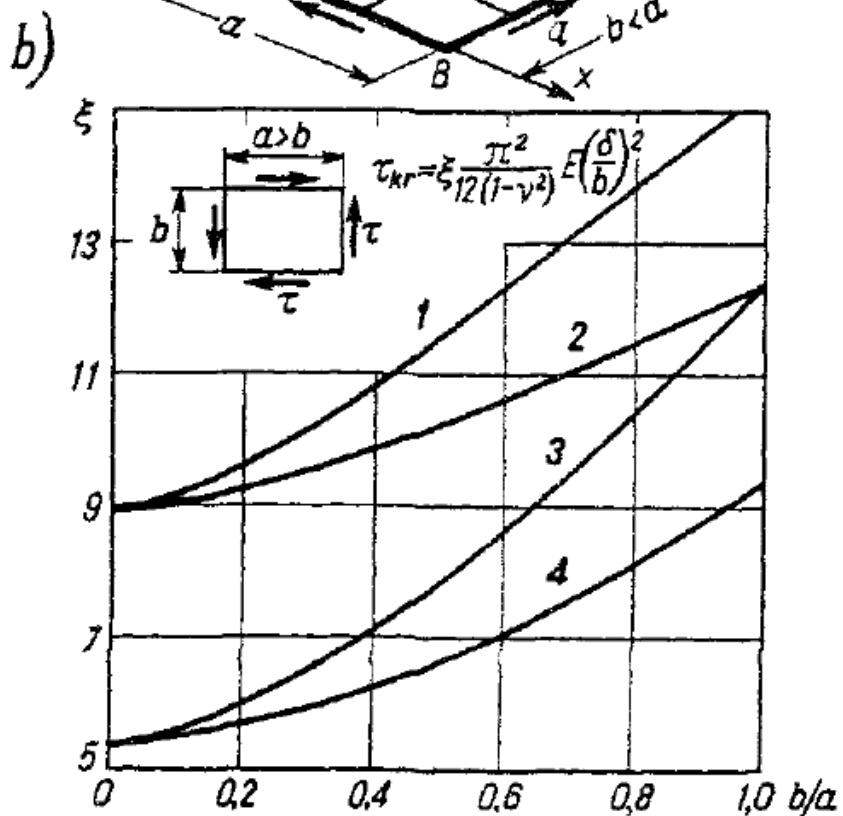
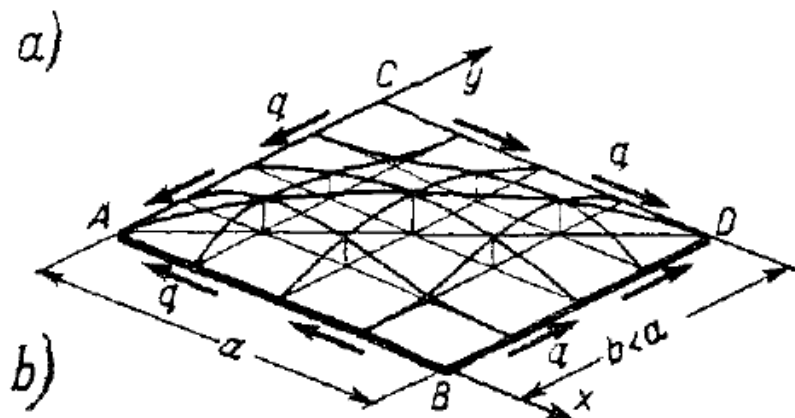
Rys. 11.1 Obraz lokalnej i ogólnej utraty stateczności konstrukcji

$$n_x = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{m^2 b}{a} + n^2 \frac{a}{b m^3} \right)^2. \quad (11.3a)$$

Z wszystkich możliwych wartości n_x odpowiadających różnym postaciom ugięcia, tj. różnym n i m , interesuje nas wartość najmniejsza. Ponieważ we wzorze (11.3a) n

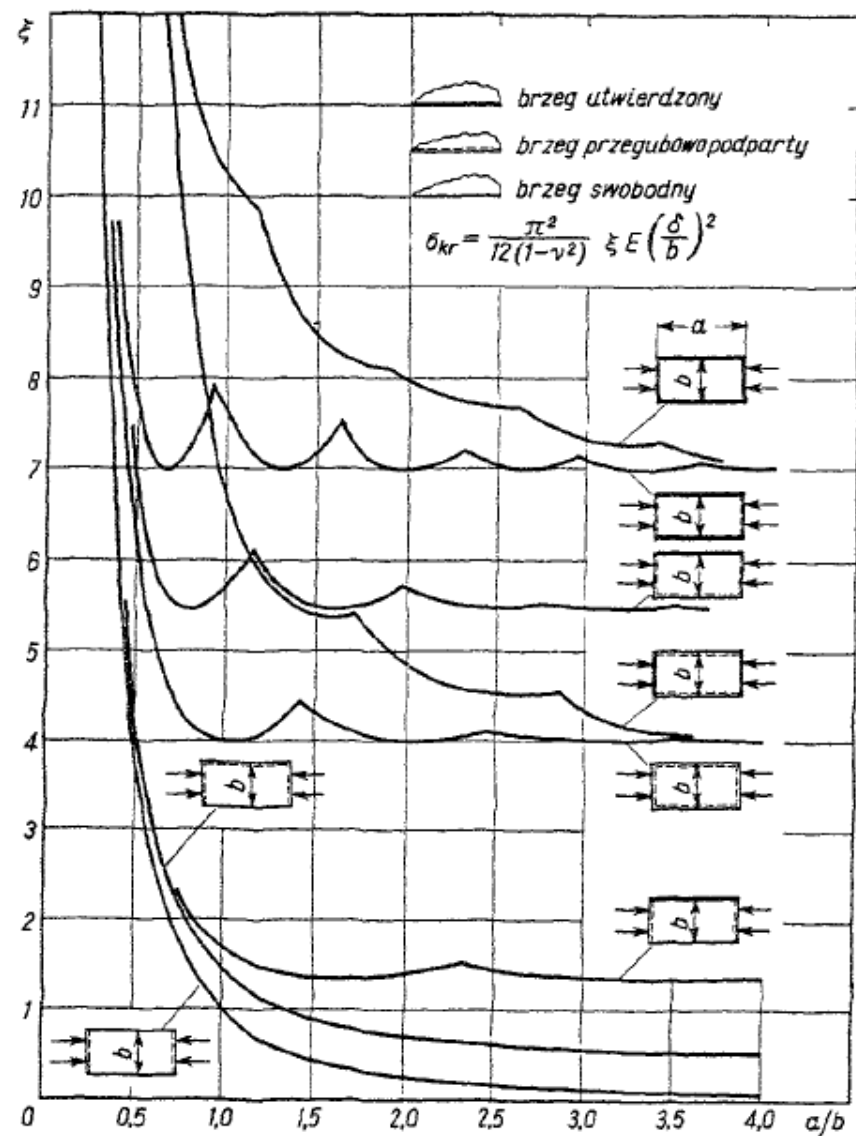


Rys. 11.3. Wyboczenie płyty podpartej przegubowo na czterech brzegach
a) geometria; b) wynik analizy; c) obraz odkształceń w przypadku $a > b$.



Rys. 11.4. Wyboczenie przy ścinaniu. We wzorze na σ_{kr} wymiar b jest zawsze długością krótszego boku

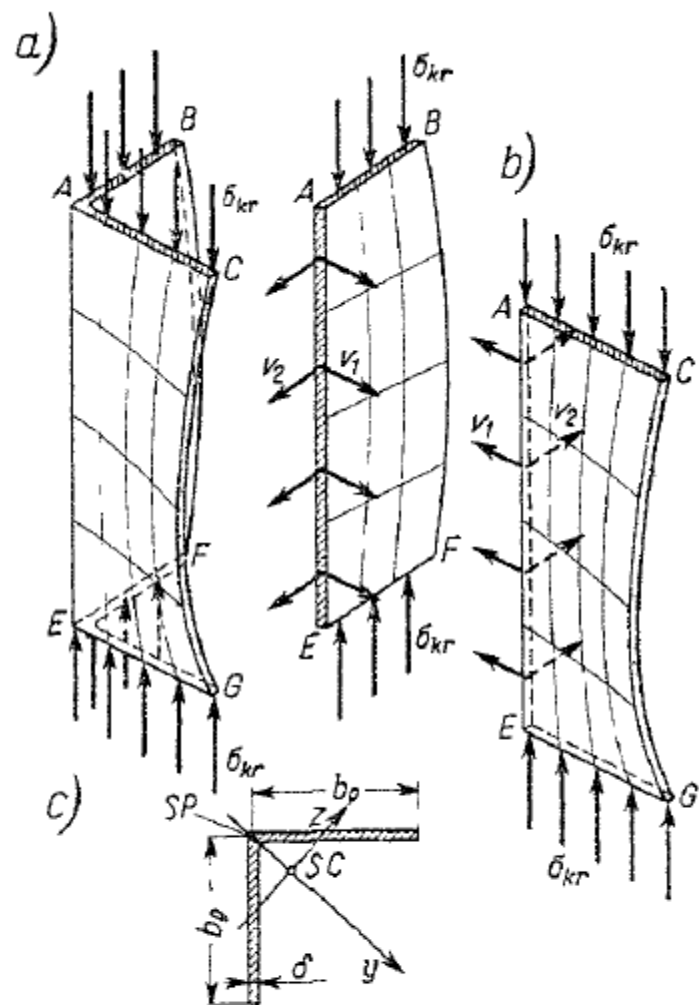
Krzywe: 1 – wszystkie 4 brzozy płyty zamocowane; 2 – brzozy dłuższe zamocowane, krótsze przegubowo podparte; 3 – brzozy krótsze zamocowane, dłuższe przegubowo podparte; 4 – wszystkie 4 brzozy przegubowo podparte.



Rys. 11.5. Naprężenia krytyczne płyty ściskanej przy różnych warunkach brzegowych

odkształceń poprzecznych na skutek istnienia usztywnień poprzecznych (np. żeber). W przypadku żeber sztywno związanych z pokryciem, wpływ ten można oszacować, wprowadzając współczynnik κ

$$\kappa = A_2/a\delta, \quad (11.6)$$



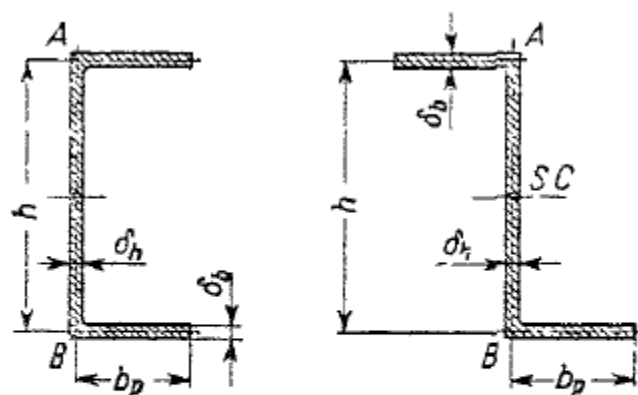
Rys. 11.15. Wyboczenie lokalne profilu kątownego

a) obraz odkształceń; b) statyka poszczególnych ścianek; c) układ osi i oznaczenia.

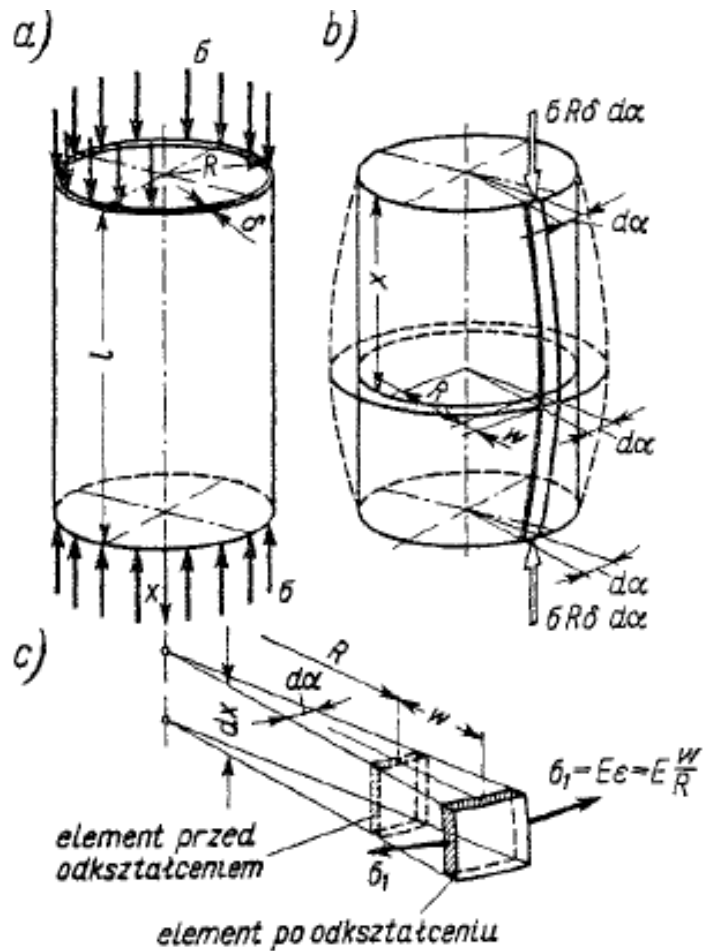
$$\sigma_{kr} \approx 0,41E \left(\frac{\delta}{b_p} \right)^2 \quad (11.14)$$

jako wartość naprężeń krytycznych jednako-
wą dla obydwu ścianek. Porównując ten wy-
nik z obliczoną według art. 10.6 wartością σ_s
dla przypadku wyboczenia skrętnego*

$$\sigma_s = P_s/A = G \left(\frac{\delta}{b_p} \right)^2 \approx 0,385E \left(\frac{\delta}{b_p} \right)^2$$



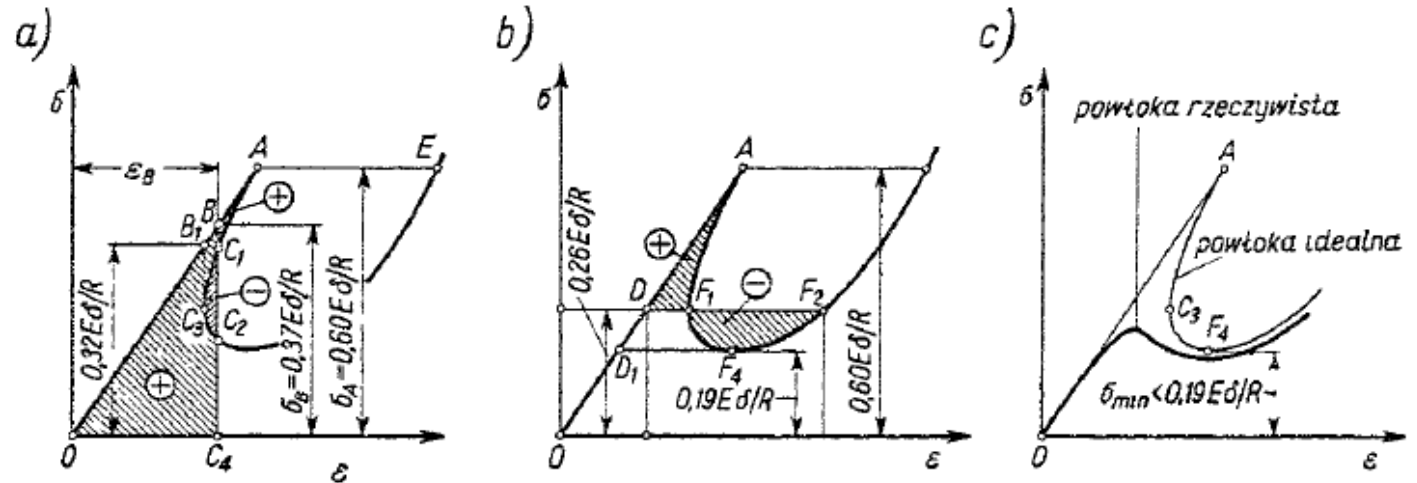
Rys. 11.16. Geometria profili analizowanych na wyboczenie lokalne



Rys. 11.27. Osiowo symetryczne wyboczenie ściskanej powłoki cylindrycznej

$$\sigma_{kr} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \left(\frac{\delta}{R} \right).$$

$$\sigma_{kr} \approx 0,6E \frac{\delta}{R}. \quad (11.29e)$$



Rys. 11.28. Warianty przeskoku ściskanej powłoki cylindrycznej
a) przeskok na maszynie sztywnej; b) przeskok na maszynie obciążnikowej.

Wyboczenie powłoki walcowej:

https://www.youtube.com/watch?v=AXSG3q1Jqp0&t=7s&ab_channel=VGOInc.

Próba ciśnieniowa zbiornika (cysterny)

https://www.youtube.com/watch?time_continue=8&v=2WJVHtF8GwI&feature=emb_logo

<https://www.youtube.com/watch?v=VS6lckF1CM0>

https://www.youtube.com/watch?v=ON17tEW_WEU&ab_channel=Infrastructure%26ProcessSolutionsInfrastructure%26ProcessSolutions